

boxes 解题报告

长沙市雅礼中学 刘研绎

1 试题大意

有一个长度为 L 的环，节点从0开始按顺时针顺序依次标为 $1, 2, \dots, L-1$ ，边长均为1。有 N 个需求要被满足，第 i 个需求形如要求给节点 p_i 送去1个物品。初始你在节点0，并且所有物品均在节点0。每次你最多携带 K 个物品从节点0出发，然后再将你携带的物品送去一些节点，再返回节点0拿一些物品，再进行分发，如此往复直到所有需求均被满足（结束时你需要回到节点0）。问你满足所有需求所要经过的最短路径长度是多少。

$$1 \leq K \leq N \leq 10^7, 1 \leq L \leq 10^9$$

2 算法讨论

考虑我们只有三种运送物品的方式：

- 从左边出发，从左边返回。
- 从右边出发，从右边返回。
- 从左边出发，从右边返回。

继续观察题目，不难发现方式一不会给编号大于 $L/2$ 的点运送物品，因为如果出现这种情况用一个方式三代替即可。同理方式二也不会给编号小于 $L/2$ 的点运送物品。再考虑方式三，方式三运送去物品的所有点中，最大的编号一定大于 $L/2$ ，最小的编号一定小于 $L/2$ 。并且方式三不会被使用1次以上，如果方式三被使用2次，根据抽屉原理，一定能拆成一次方式一或方式二再加一次方式三。

既然只会进行一次方式三，不妨枚举他满足了 a 个编号小于 $L/2$ 的需求，那么编号小于 $L/2$ 的点和编号大于等于 $L/2$ 的点就可以分开考虑了，并且每一个问

题都是一个一维的问题。单独考虑那些编号小于 $L/2$ 的点，这些点中已经被满足了 a 个需求。根据归纳法可知，一定是满足的最远的 a 个需求。

问题至此已经简化为有一条线段，要将物品从最左端运到一些点，使得所需的路径长度最短。不妨用贪心解决这个问题，考虑最远的那个需求，一定有一次运送物品到达了那里，那么不妨将这次运送的 K 个物品分给最远的 K 个需求，同样可以用归纳法证明他的正确性。

不难发现我们可以预处理左右两边被删除 $1..K - 1$ 个需求的答案，对方式三进行枚举的时候我们 $O(1)$ 回答询问。这样时间复杂度便是 $O(N)$ 的。

问题至此迎刃而解。