

horses 解题报告

长沙市雅礼中学 刘研绎

1 试题大意

你非常喜欢马，在第0年初，你买进了1匹马。从第0年开始的每一年，如果第*i*年初你有*c*匹马，在这年年末你将拥有 $c \cdot x_i$ 匹马，并且此时你可以选择出售，售价为 p_i 。你已经知道了未来*N*年每年的 x_i, p_i 。但这些数值可能有修改，总共有*M*次修改，每次可能修改某个 x_i 或 p_i ，你需要在每次修改后回答你在这*N*年中最多能赚多少钱，你只用输出答案对 $10^9 + 7$ 取模的结果。

$$1 \leq N \leq 5 \cdot 10^5, 1 \leq M \leq 10^5, 1 \leq x_i, p_i \leq 10^9$$

2 算法讨论

需要观察到一个结论：

我们拥有的马只会在某一年一次性全部卖出。

为了证明这个结论，不妨假设某年我们卖出了一部分马，又保留了一部分马。考虑某一匹保留下来的马，未来它可能不断变多然后再被卖掉一些，但无论怎样这匹马有一个总价值，我们只要用总价值和这年的卖出的价格相比，选一个更贵的就行。那么很显然所有马的决策是一样的，结论得证。

有了这个结论，答案可以写成：

$$\max_j \left\{ \prod_{i=1}^j x_i \cdot p_j \right\}$$

考虑我们可以用线段树直接维护这个式子。

对于一个覆盖第*l..r*年的线段树节点，不妨记录*f*表示在第*l*年初的一匹马在这*l..r*年内最多赚到*f*，*g*表示第*l*年初的一匹马在第*r*年年末能变成*g*匹马。很显然这两个信息是可以合并的，于是问题至此迎刃而解。

时间复杂度 $O(M \log N)$ 。

还可以考虑直接暴力维护这个式子，因为 $p_i \leq 10^9$ ，因此我们选择卖马的年份一定也是比较靠后的，不妨暴力维护那些 $x_i > 2$ 的年份，这也是一种可行的方法。